

Discussion der Beobachtungsfehler in Koppe's Vermessung für die Gotthardtunnelachse.*)

1. Die Horizontalmessung. Bei der Discussion der Beobachtungsfehler, welche nach der Ausgleichungsrechnung den Messungen anhaften, muss man sich immer erinnern, dass eigentlich diese sogenannten Beobachtungsfehler durchaus nicht die wahren Beobachtungsfehler sind, sondern nur plausibelste oder allenfalls wahrscheinlichste Fehler. Wenn sich nun auch für diese plausibelsten Fehler findet, dass sie dem Gauss'schen Fehlergesetz entsprechend sich nach Grösse und Vorzeichen verteilen, so folgt daraus keineswegs, dass auch die wahren Beobachtungsfehler jenem Gesetze entsprechen. Man kann nur umgekehrt mit Sicherheit schliessen: Sobald die wahren Beobachtungsfehler nach dem Gauss'schen Gesetze eintreten, also zufälliger Natur sind, so wird dasselbe auch für die plausiblen Fehler der Ausgleichung stattfinden und zwar mit um so grösserer Wahrscheinlichkeit, je mehr Controlmessungen zur Ausgleichung hinzutreten; denn damit wächst zugleich die Wahrscheinlichkeit, dass diese Rechnung *wahre* Resultate ergiebt.

Hat man die Vertheilung plausibler Fehler untersucht und wie Koppe S. 432. IV. gefunden, dass sie den Charakter zufälliger Fehler haben, so ist nun zu prüfen:

- 1) Ob die Art der Rechnung nicht etwa diesen Charakter mit Nothwendigkeit erzeugen musste, gleichviel ob die wahren Beobachtungsfehler rein zufällige oder zum Theil mit systematischen und constanten Einflüssen behaftet waren; und es ist ferner zu prüfen:
- 2) Ob etwa vorhandene constante und systematische Fehler einflüsse in den Widersprüchen der Bedingungsgleichungen bemerkbar sein würden oder nicht.

Was diesen letzten Punkt anlangt, so kann man behaupten, dass in der Regel constante und systematische Fehler einflüsse auf den Widersprüchen der Bedingungsgleichungen bemerkbar sein würden oder nicht.

*) Da die Discussion der Beobachtungsfehler ein hohes praktisches Interesse hat, so entschloss ich mich, obgleich ich die Principien derselben in meiner Ausgleichungsrechnung ausführlich erörtert habe, auch in dieser Zeitschrift an der Hand der Koppe'schen Arbeit dafür ein Beispiel zu geben.

sich in den Widersprüchen der Bedingungsgleichungen bemerklich machen werden und nicht etwa ihr Totaleinfluss auf die Mehrzahl dieser Grössen sich auf Null reducire. Beispielsweise muss es sich in den Winkelsummen der Dreiecke zeigen, wenn alle Winkel zu klein gemessen worden wären oder wenn einzelnen Richtungen constante Fehler durch Lateralrefractionen, persönliche Auffassung u. dergl. anhaftten. Aber merkwürdigerweise werden doch die durch die Ausgleichung geforderten Richtungsverbesserungen wenig oder gar nichts von den eben genannten Einflüssen verrathen, weil eben die Art der Rechnung diesen Verbesserungen einen solchen Zwang auferlegt, dass sie auf alle Fälle wenigstens eine der charakteristischen Eigenschaften zufälliger Fehler zeigen müssen.

Die Ausgleichung setzt nämlich die Summe aller Richtungsverbesserungen gleich Null. Die Summe einer grösseren Anzahl zufälliger Fehler einer Beobachtungsreihe ist aber erfahrungsmässig auch nahezu gleich Null. Allein nicht nur die Gesamtsumme aller Richtungsverbesserungen überhaupt, sondern auch die Summe für jede Station des Netzes im Einzelnen ist genau Null. Nun denke man sich die 68 Richtungsverbesserungen, welche in 12 Gruppen zerfallen, deren jede Null ist. Sehr wahrscheinlich stellt sich dann heraus, dass positive und negative in gleicher Anzahl vorhanden und dass nahezu das Gauss'sche Gesetz auch in der Grössenvertheilung befolgt wird, was sich z. B. für den vorliegenden Fall mathematisch unschwer nachweisen lässt unter der Voraussetzung, dass alle Winkel zu gross (oder zu klein) gemessen worden wären.

Aus diesen Gründen ist es nothwendig, die Fehleruntersuchungen nicht auf Richtungsverbesserungen, sondern auf Winkelverbesserungen zu stützen. Die von Koppe ermittelten 56 Winkelverbesserungen S. 413. IV. geben 80,8 als Quadratsumme, daher 1,44 als Durchschnittsquadrat und ferner $\pm 1,20$ als mittleren, $\pm 0,80$ als wahrscheinlichen Betrag einer solchen Verbesserung. Es liegen, abgesehen vom Vorzeichen,

zwischen 0 und 0,8	28	Verb.	(28)
>	0,8	>	(18)
>	1,6	>	(7,5)
>	2,4	>	(2,5)
>	3,2	>	11.

sodass die Vertheilung dem Gauss'schen Gesetz, welches die Zahlen in Klammer giebt, gut entspricht. Beachtet man die Vorzeichen, so zeigt sich indess eine Abweichung von dem Vertheilungsgesetz zufälliger Fehler. Man hat

	Neg. Verb.	Pos. Verb.
Anzahl	23	33
Summe	26,4	30,3
Quadr. Summe	39,0	41,8

und es spricht sich hierin ein Vorherrischen positiver Verbesserungen aus.

Die Verwendung der 56 Winkelverbesserungen in der angegebenen Weise unterliegt dem Vorwurfe, dass diese Verbesserungen nicht völlig unabhängigen Beobachtungen entsprechen, da alle Winkel der 12 Stationen von einer willkürlichen Nullrichtung abgezählt sind. Den Richtungsverbesserungen dieser Nullrichtungen ist somit auch ein viel grösserer Einfluss auf die Winkelfehler eingeräumt, als den andern Richtungsverbesserungen. Wir bildeten nun folgende unabhängige Winkelverbesserungen:

(1)	-0,9	+0,1
(3) - (2)	+1,8	-2,9
(4)	-1,4	+0,3
(6) - (5)	+1,7	-2,1
(8) - (7)	+0,4	-1,8
(9)	+1,0	-0,6
(11) - (10)	-0,1	+0,4
(13) - (12)	-2,0	+0,4
(15)	+2,7	-1,1
(17) - (16)	+1,8	-0,1
(19) - (18)	-2,0	-0,7
(20)	+0,8	+1,6
(22) - (21)	-2,9	+1,1
(24) - (23)	-3,2	-1,3
(26)	+0,6	-0,8
(28) - (27)	+2,6	+2,2

Nimmt man Rücksicht auf die Vorzeichen, so ergibt sich:

	Neg. Verb.	Pos. Verb.
Anzahl	16	15
Summe	23,9	19,1
Quadr. Summe	49,8	27,1

Nach der neuen Aufstellung mehren sich die Anzeichen constanter Einflüsse; allein nicht mit Unrecht lässt sich derselben der Einwurf der Willkürlichkeit in der Bildung der unabhängigen Winkelverbesserungen machen. Den sichersten Aufschluss giebt wohl die Betrachtung der *Widersprüche der Winkelbedingungsgleichungen*. Diese Widersprüche sind überdies sehr einfache Funktionen wahrer Beobachtungsfehler, was die Einsicht erleichtert. Ihre Quadratsumme ist 137,3; ihre Anzahl 19; also ist der wahrscheinliche Betrag eines Dreieckswiderspruchs $\pm 1,81$. Die Vertheilung nach der Grösse, abgesehen vom Vorzeichen, wird damit folgende. Es liegen

	zwischen 0 und 1,06	13 Verb.	(15,5)
>	1,06	2,12	(10)
>	2,12	3,18	(4)
über	3,18	1	(1,5)

Die Berücksichtigung des Vorzeichens, genommen im Sinne der entsprechenden Winkelverbesserungen, gibt anderseits:

	neg. Widerspr.	pos. Widerspr.
Anzahl	10	9
Summe	22,5	23,4
Quadr. Summe	62,0	75,3

Hieraus folgt, dass negative und positive Fehler der Grösse nach in gleicher Vertheilung vorkommen und es hat darnach der Theodolit keine Tendenz gehabt, die Winkel zu vergrössern oder zu verkleinern. Auf die Existenz constanter Fehler für einzelne Richtungen deutet aber die vergleichsweise zum Gauss'schen Fehlergesetz starke Anhäufung der Widersprüche zwischen 2" und 4" hin. *)

Bemerkt mag noch werden, dass der wahrscheinliche Fehler eines Winkels aus dem wahrscheinlichen Betrag $\pm 1,81$ eines Dreieckswiderspruchs folgt gleich $\pm 1,81 : \sqrt{3}$ d. i. $1,04''$; genau derselbe Werth, welchen die Gesammtausgleichung gibt, woraus zu erkennen, dass die Seitenbedingungsgleichungen keine Fehlereinflüsse andeuten, welche nicht auch in den Widersprüchen der Winkelbedingungsgleichungen zum Ausdruck gelangt sind.

Wir haben noch in anderer Weise die Existenz der oben erwähnten Einflüsse nachzuweisen versucht. Dieselben sind nach ihrer Definition nicht bemerkbar in den Ausgleichungen der Stationsmessungen und müssen daher eine Vergrösserung des wahrscheinlichen Fehlers einer Winkelbeobachtung, wenn man von den Stationsausgleichungen zu der Netzausgleichung übergeht, erzeugen. Wegen Mangel an Zeit haben wir nur für 5 der 12 Stationsausgleichungen den wahrscheinlichen Beobachtungsfehler abgeleitet, jedoch dürfte dies ausreichend sein. Es fand sich:

Mittleres Fehler-Quadrat einer Richtung.		
Airolo	177,4 :	27 = 6,6
Stabbielo	131,9 :	27 = 4,9
Gütsch	441,0 :	45 = 9,8
Rienstock	294,9 :	45 = 6,3
Piz Borel	662,9 :	54 = 12,3
In Summa 1708,1 : 198 = 8,6		

Das mittlere Fehler-Quadrat eines Winkels ist somit 17,2 und der wahrscheinliche Fehler eines Winkels gleich $\pm 2,8''$. Es wurde aber jeder Winkel 10 mal gemessen, mithin folgt für's Mittel der w. F. gleich $\pm 2,8 : \sqrt{10}$ d. i. $\pm 0,88''$. Die Netzausgleichung giebt in der That mehr, nämlich $\pm 1,04''$. Dazu kommt noch der Umstand, dass die Stationsausgleichungen die systematischen Theilungsfehler wohl in die wahrscheinliche Fehlerberechnung eingehen lassen, nicht aber in die Endresultate, da die Winkel nahezu symmetrisch über die Kreisperipherie verteilt sind. Mithin enthält $\pm 0,88''$ noch die systematischen Theilungsfehler; $\pm 1,04''$ ist aber frei davon. Die systematischen Theilungsfehler zeigen sich ganz deutlich in der Vorzeichengruppirung der Richtungsverbesserungen in den Stationsausgleichungen. Wir erläutern dies an einem beliebig herausgegriffenen Beispiel, welches zugleich die Ableitung der Richtungsverbesserungen zu zeigen bestimmt ist.

Rienstock.

Verbesserungen der Winkel nach S. 386. IV.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & & & \\
 & \circ \\
 & +1,9 & +1,8 & -3,7 & -1,6 & -4,0 & -4,4 & +6,0 & -1,3 & +1,6 & +3,3 \\
 & +0,5 & -4,5 & -2,3 & -0,5 & -0,2 & +0,4 & +1,7 & +6,3 & +0,4 & -1,4 \\
 & +0,6 & -3,2 & -2,5 & -2,3 & -5,0 & -1,0 & +4,1 & +2,7 & +4,6 & +2,5 \\
 & +0,1 & -3,1 & -4,0 & -2,8 & +3,2 & -5,3 & +4,8 & +8,1 & +0,6 & -1,3 \\
 & -1,9 & +1,4 & +0,3 & +1,5 & +0,9 & -1,3 & +2,5 & -1,3 & +0,2 & -2,3 \\
 \\
 \text{Sa.} & +1,2 & -7,6 & -12,2 & -5,7 & -5,1 & -11,6 & +19,1 & +14,5 & +7,4 & +0,8
 \end{array}$$

*) Demgemäss sind nun die Endresultate der Ausgleichung nicht in Strenge wahrscheinlichste, sondern nur so berechnet, dass sie grössere Gewichte besitzen.

Von den Summen nimmt man $\frac{1}{6}$ und zieht dies von allen Richtungsverbesserungen ab; dann erhält man die nachstehenden

Richtungsverbesserungen.

$$\begin{array}{r}
 -0,2 + 1,3 + 2,0 + 1,0 + 0,9 + 1,9 - 3,2 - 2,4 - 1,2 - 0,1 \\
 + 1,7 + 3,1 - 1,7 - 0,6 - 3,1 - 2,5 + 2,8 - 3,7 + 0,4 + 0,1 \\
 + 0,3 - 3,2 - 0,3 + 0,5 + 0,7 + 2,3 - 1,5 + 3,9 - 0,8 - 1,5 \\
 + 0,4 - 1,9 - 0,5 - 1,3 - 4,1 + 0,9 + 0,9 + 0,3 + 3,4 + 2,4 \\
 - 0,1 - 1,8 - 2,0 - 1,8 + 4,1 - 3,4 + 1,6 + 5,7 - 0,6 - 1,4 \\
 - 2,1 + 2,7 + 2,3 + 2,5 + 1,8 + 0,6 - 0,7 - 3,7 - 1,0 - 2,4
 \end{array}$$

Summen nahezu Null.

In den horizontalen Reihen finden nur 19 Zeichenwechsel statt, während 9 mal 6 d. i. 54 stattfinden könnten. Man hat überhaupt

	17 Zeichenwechsel	Maximum	36
Airolo	22	>	36
Stabbiello	23	>	54
Gütsch	19	>	54
Riemstock	31	>	63
Piz Borel			
In Summa	112	>	243

Dies deutet auf nicht unerhebliche systematische Theilungsfehler hin, welche dem Mittel der Ablesungen an 4 gleichmässig über die Peripherie vertheilten Nonien noch anhaften. Wir schätzen den wahrscheinlichen Betrag gegen $\pm 1,5''$ für eine Richtung und demgemäss auf $\pm 2,1''$ für einen Winkel. Bildet man hiervom das Quadrat und subtrahirt es von 2,81, zieht darauf die Quadratwurzel, so bleibt $\pm 1,9''$ als w. F. einer Winkelangabe, insoweit er von Visur- und Ablesefehlern herführt. Für das arithmetische Mittel von 10 Angaben eines Winkels ergibt sich hiernach als w. F. $\pm 0,6''$ und dieser Werth ist nun erst vergleichbar mit dem Werth $\pm 1,04''$ zu folge der Netzausgleichung. Für die constanten Fehler der einzelnen Richtungen des Netzes (Lateralrefraction, persönliche Auffassung u. dgl.) ergiebt sich somit der wahrscheinliche Werth

$$\sqrt{1,04^2 - 0,6^2} \text{ d. i. } \pm 0,8''.$$

für die Gotthardtunnelachse.

Es dürfte dieser Betrag ein verhältnismässig geringer genannt werden müssen. Zugleich zeigt sich, dass Koppe gerade eine hinreichende Anzahl Winkelmessungen ausgeführt hat, denn eine weitere Vermehrung derselben würde nur den Einfluss der Visur- und Ablesefehler unter $\pm 0,6''$ herabgedrückt, nicht aber den constanten Fehler der Richtungen vermindert haben.

Ein Anderes ist es mit der Vermehrung der Anzahl der Richtungen. Hier hat Koppe durch Einschneiden möglichst vieler Diagonalen den Vorteil erzielt, auch noch die constanten Fehler der einzelnen Richtungen möglichst unschädlich zu machen, ein Vorteil der durch Auswahl einer kleinen Anzahl Richtungen, die aber sehr vielmal beobachtet worden wären, nicht hätte erreicht werden können.

Was schliesslich die Leistungsfähigkeit des Theodolits anlangt, so ist diese durch den w. F. $\pm 1,9''$ einer Winkelangabe auf einer Station charakterisiert. Dieser w. F. ist von dem systematischen Theilungsfehler gereinigt und enthält nur Visur- und Ablesefehler incl. zufälligen Theilungsfehlern. Jede solche Winkelangabe ist das Mittel von 2 Messungen in beiden Fernrohrlagen. Der w. F. für eine Messung eines Winkels in beiden Lagen (oder für eine einmalige Richtungsbeobachtung) ist daher $\pm 2,6''$ und der entsprechende mittlere Fehler gleich $\pm 4,0''$.

Die Berücksichtigung aller Verhältnisse lässt hieraus schliessen, dass mit einem Mikroskoptheodolit der kürzlich beschriebenen Art die gleiche Genauigkeit der Endresultate etwa durch die halbe Messungsanzahl für jede Richtung sich hätte erreichen lassen, was bei den schwierigen Existenzverhältnissen im Hochgebirge sehr in's Gewicht fällt.

II. Die Höhenmessungen. Wir stellen die durch die Ausgleichung geforderten Fehler nebst ihren nach der Formel

$$p = 100 : (\text{Distanz in Kilometern})^2$$

berechneten Gewichten zusammen zu dem Zwecke, diese Formel zu prüfen und event. eine bessere an ihre Stelle zu setzen.

Gewicht p	Verb. v	$v^2 p$	$v^2 p^2$
1	35,6	1267	1267
1	1,2	1	1
1	35,1	1232	1232
1	37,1	1376	1376
1	11,4	130	130
1	6,6	44	44
1	7,0	49	49
1	49,1	2411	2411
2	10,0	200	400
2	0,5	1	2
2	10,1	204	408
3	2,7	22	66
3	2,2	15	45
4	1,2	6	24
5	13,9	970	4850
5	6,3	199	995
6	0,1	0	0
7	3,4	81	567
7	4,3	129	903
10	2,9	84	840
14	0,1	0	0
15	5,5	453	6795
17	0,2	1	1
20	3,2	205	4100
23	0,5	6	138
30	0,3	3	90
60	0,4	10	600

Wir haben die Verbesserungen in drei Gruppen zerfällt; diese geben den Durchschnittswert von $v^2 p$ gleich

$$\begin{array}{l|l} 6510: & 8 = 814 \\ 1617: & 8 = 202 \\ 972:11 & = 88 \end{array} \quad \begin{array}{l} p = 1 \\ p = 2 \text{ bis } 5 \\ p = 6 \text{ bis } 60 \end{array}$$

Hier spricht sich denn deutlich aus, dass die p zu klein sind. Erheilt man den Verbesserungen Gewichte g nach der Formel

$$g = \left\{ \begin{array}{l} 100 : (\text{Distanz in Kilometern})^2 = p^2, \\ \dots \end{array} \right.$$

so folgt für die drei Gruppen als Durchschnitt von $v^2 g$ d.i. $v^2 p_g$

$$\begin{array}{l|l} 6510: & 8 = 814 \\ 6790: & 8 = 849 \\ 14034:11 & = 1276 \end{array} \quad \begin{array}{l} g = 1 \\ g = 4 \text{ bis } 25 \\ g = 36 \text{ bis } 3600 \end{array}$$

Bedenkt man, dass eine neue Ausgleichung mit den *vergrößerten* Gewichten eine beziehungsweise *Verkleinerung* der Fehler ergeben muss, da ja $[v^2 g]$ ein Minimum wird, so hat die Hypothese der g grosse Wahrscheinlichkeit für sich. Diese Hypothese sagt aber, dass bei den Höhenmessungen der mittlere Fehler mit dem Quadrat der Distanz gewachsen ist, mithin die Fehler in den angewandten Refractionscoefficienten über die Messungsfehler dominirten.

Helmert.

Zur Fehlerausgleichung der Liniennetze aus gemessenen Längen und Winkeln.

Vorberemarkung.

In meiner bei B. G. Teubner in Leipzig 1858 unter dem Titel „Ausgleichung der Fehler polygonometrischer Messungen“ erschienenen Abhandlung versuchte ich zunächst, die Aufgabe in aller Strenge zu lösen, nämlich nicht nur alle drei Bedingungsausgleichungen derselben auf einmal in Rechnung zu nehmen, sondern auch die Gewichtsverschiedenheiten der gemessenen Längen und Winkel zu berücksichtigen. Als ich fand, dass dazu ein sehr grosser Aufwand von Helfszahlen nötig sei und die zu ihrer Herstellung erforderliche Arbeit für die gewöhnliche Anwendung der Liniennetze eine durch den Erfolg nicht zu rechtfertigende Zeitverwendung im Anspruch nahm, ver suchte ich schon im Anhange der Abhandlung Näherungsver-